

PODATEK OD LUDZI SŁABYCH W MATEMATYCE

„Co to jest totalotek? To podatek od ludzi słabych w matematyce...”

$$P(49,6) = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6! * (49 - 6)!} =$$

$$= \frac{49 * 48 * 47 * 46 * 45 * 44}{6 * 5 * 4 * 3 * 2} = 13983816$$

To zdanie to oczywiście dowcip, który niestety w sposób dość prosty przekazuje podstawową prawdę. Nie minął jeszcze miesiąc od wielkiego szaleństwa, w którym ludzie walili drzwiami i oknami do kolektur tylko po to, by wydać dużo pieniędzy na kawałki papieru, które po godzinie losowania nadawały się jedynie do wyrzucenia. To logiczne, że możliwość zdobycia jednego, dwóch, pięciu, dziesięciu czy czterdziestu milionów za jedno jedyne skreślenie warte kilka złotych wydaje się kusząca i przyciąga graczy do kolektur. W tym artykule nie będę ani zniechęcał ani zachęcał do gry w zakłady liczbowe. Chciałbym jedynie pokazać kilka rzeczy z punktu widzenia bardziej bliższego nam – studentom ekonomii.

Jak 1 do 14 milionów

Obiektywna ocena szansy wygranej w dowolną grę liczbową jest ciekawym zadaniem z dziedziny kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa. Ze szkoły średniej lub z zajęć z rachunku prawdopodobieństwa ze studiów większość studentów powinna znać prostą metodę na policzenie prawdopodobieństwa głównej wygranej w Dużym Lotku. Liczbę możliwych skreśleń sześciu spośród 49 liczb można policzyć bardzo prosto jako ilość 6-elementowych kombinacji bez powtórzeń ze zbioru 49-elementowego, co zapisujemy następującym wzorem:

Liczba możliwych do zawarcia zakładów jest równa prawie 14 milionów, a jej odwrotność 1/14 milionów to matematyczne prawdopodobieństwo wygranej, które wynosi $7,151 * 10^{-8}$, czyli 0,00000007151. W liczniku jest liczba 1, gdyż oczywiście jest tylko jedna kombinacja, dająca główną wygraną. Tak małe prawdopodobieństwo łatwiej wyobrazić w inny sposób: w ciągu ostatnich 1600 lat do dzisiaj minęło mniej więcej tyle godzin, ile jest możliwych kombinacji w Dużego Lotka. Całkiem sporo :).

Zajmijmy się nagrodami niższego stopnia. Wygrana stopnia II polega na skreśleniu sześciu liczb i poprawnym wytypowaniu pięciu z nich. Pięć poprawnych liczb spośród sześciu wylosowanych możemy wytypować na sześć sposobów ($C(6,5) = 6$), lecz w miejsce każdej nietrafionej liczby musimy skreślić jedną z pozostałych niewygrających, czyli jedną z 43. Wymnażając, mamy więc $43 * 6 = 258$ możliwych skreśleń, w których wygrywamy nagrodę II stopnia. Mnożąc prawdopodobieństwo wygrania „szóstki” przez otrzymaną liczbę otrzymamy prawdopodobieństwo wygrania „piątki” równe $1,84499 * 10^{-5}$, czyli 0,00001845. Nadal mało, ale i tak bardziej prawdopodobne niż „szóstka”. Idąc tym tokiem myślenia można obliczyć prawdopodobieństwo wygranej dowolnego S-tego

stopnia ($S=1,2..6$) przy skreśleniu L liczb i losowaniu N liczb, które można wyrazić wzorem:

$$P(N, L, S) = \frac{\binom{L}{S} * \binom{N-L}{L-S}}{\binom{N}{L}}$$

Przykładowo, dla czwórki prawdopodobieństwo wyniesie:

$$P(49,6,4) = \frac{\binom{6}{4} * \binom{49-6}{6-4}}{\binom{49}{6}} =$$

$$= \frac{\binom{6}{4} * \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = 0,0009686$$

Tak wyliczone prawdopodobieństwa poprawnych trafień X liczb pokazuje poniższa tabela:

X - ilość poprawnie wytypowanych liczb	P(X) - prawd. poprawnego wytypowania X liczb
1	0,413
2	0,1323
3	0,01765
4	0,0009686
5	0,00001845
6	0,00000007151
0	0,436

Wartość $P(0)$ policzyłem, odejmując od jedynki sumę pozostałych prawdopodobieństw.

Wnioski? Skreślając jeden pojedynczy zakład w Dużym Lotku mamy 43,6% szans, że nie trafimy nic. Następnie w 41,3% przypadków trafimy tylko jedną liczbę, w 13,2% dwie liczby, a w 1,765% trzy liczby. Prawdopodobieństwo trafień 4, 5 i 6 liczb jest na tyle znikome, że nie będą go już wymieniał :).

Sztuczki magiczne

Z obserwacji wiem, że wielu ludzi ma swoje magiczne metody na skreślanie liczb. Zdarza się słyszeć, że jakaś liczba nie padła przez 20 losowań, więc w końcu musi paść. Ktoś może stwierdzić, że pewne liczby zdarzają się w parach częściej niż inne. Mam dość sceptyczne podejście do tego typu praktyk – statystycznie, trafienie dowolnie wybranej przez siebie kombinacji jest tak samo prawdopodobne, jak to, że padną liczby 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Każda z liczb teoretycznie powinna paść raz na osiem losowań, ale ma to zastosowanie jedynie dla dużej liczby losowań, znacznie większej niż wynika to z krótkotrwałego okresu obserwacji gier. Niektóre systemy gry w Dużego Lotka opierają się na odgórnym przypisaniu większego prawdopodobieństwa wypadnięcia pewnych liczb nad innymi. Nietrudno zgadnąć, że to, co mogło być prawdą w przeszłych losowaniach, wcale nie oznacza, że tak się stanie w przyszłości. Po raz kolejny należy podkreślić, że dla dużej ilości gier prawdopodobieństwo wypadnięcia każdej z liczb jest jednakowe, a także niezależne od poprzednich losowań. Automatycznie wyklucza to prawdziwość systemów skreślania liczb w oparciu o ich częstość padania w przeszłych losowaniach. Również fakt występowania pewnych par liczb częściej niż inne jest do wytłumaczenia zbiegiem okoliczności, o ile oczywiście zakładamy, że maszyna nie ma ukrytych wad technicznych, czego jednak nie jesteśmy w stanie zweryfikować (można by pokusić się o udowodnienie pewnych związków, ale ponownie – liczba losowań od ostatniej wymiany maszyny losującej jest zbyt mała, by można było stanowczo coś stwierdzić). Truizmem będzie powiedzenie, że maszyna na pewno nie ma ulubionych liczb, na pewno nie wie, co wcześniej wylosowała, ani też na pewno nie robi nam tego na złość :) Trzeba po prostu przyjąć, że wyniki są autentycznie losowe.

»10

A zatem skąd Totalizator ma pieniądze na nagrody?

No jak to skąd, to chyba oczywiste, że z kieszeni pechowych graczy :) Czy jednak Duży Lotek jest grą faktycznie uczciwą? Nie ma się co łudzić, gra nie jest po to, by rozdawać pieniądze na lewo i na prawo, ale by na siebie zarabiać. Jeśli potraktujemy X jako zmienną losową skokową, która przyjmuje wartości 0, 1, 2, 3, 4, 5 i 6 odpowiednio do liczby trafień, to wówczas nadzieja matematyczna wyniesie 0,73, co wymownie mówi, czego powinniśmy oczekiwać od wystanego kuponu.

Co więcej, nie możemy mieć nawet pewności, że wszystkie lub choćby znaczna większość wydanych przez nas pieniędzy trafi do zwycięzcy losowania. Oto autentyczne wysokości wygranych w losowaniu z 27/09/2008 (celowo wybrałem ten dzień, gdyż w poprzedzającym losowaniu dwa dni wcześniej padła szóstka, co wyklucza efekt kumulacji):

stopień	ilość wygranych	wysokość wygranej
I (szóstka)	1	1 509 428,50
II (piątka)	94	4 460,50
III (czwórka)	5039	140,10
IV (trójka)	97399	16,00

źródło: lotto.pl

Wykorzystując wiedzę o ilości wygrywanych IV stopnia, można w przybliżeniu oszacować ilość wszystkich zakładów, wiedząc, że statystycznie trójka pada raz na 56,6572 zawartych zakładów (odwrotność wartości prawdopodobieństwa trafienia trójki). Wynikałoby z tego, że dla tego konkretnego losowania zawarto ok. 5 518 355 zakładów (jest to wartość teoretyczna, nie musi mieć pokrycia w praktyce, ale też nie powinna się wiele od niej różnić). Znając tę liczbę, można wyznaczyć oczekiwane ilości wygranych po-

szczególnych stopni, wykorzystując wyliczone wcześniej prawdopodobieństwa.

stopień	teoretyczna, oczekiwana ilość wygranych
I (szóstka)	0.39
II (piątka)	102
III (czwórka)	5345
IV (trójka)	97399

źródło: obliczenia własne

Jak widać, teoretyczne wartości nie odbiegają znacząco od wartości empirycznych (względne błędy ok. 6% dla czwórki, 8,5% dla piątki). Mając oszacowaną liczbę zawartych zakładów, można obliczyć, ile pieniędzy wpłacili do puli gracze. Każdy zakład kosztuje 2zł, czyli pula na wygrane pochodząca z pieniędzy za zawarte zakłady mogła wynieść ok. 11 036 710 zł. Faktyczne wypłaty (biorąc pod uwagę rzeczywistą liczbę wygranych i odpowiadających im kwot pieniężnych) osiągnęły 4 193 063zł, co oznacza, że wpływy były dwa razy większe niż odpływy, a różnica to zarobek Totalizatora. W rzeczywistości, kwota wpłacona w ramach zawartych zakładów może okazać się nieco mniejsza, gdyż istnieje statutowy nakaz przeznaczenia ponad 51% wpływów na wygrane. Z płaconych przez nas 2zł do kasy Lotto trafia mniej, bo należy uwzględnić wliczony podatek od gier (wynosi 20%). To i tak oznacza, że z każdego wpłaconych 2 zł tylko nieco ponad połowa idzie do zwycięzców, a reszta po odprowadzeniu podatku do kieszeni organizatora loterii.

Warto wiedzieć, że wysokość nagród I, II i III stopnia jest zmienna, stała jest natomiast wygrana stopnia IV. W ten oto sposób wysokość nagrody zależy od liczby zawartych zakładów – w interesie zarówno organizatora jak i wygrywającego jest to, by jak najwięcej

ludzi wpłaciło pieniądze za zawarte zakłady. W moim osobistym odczuciu wątpliwe jest jednak, żeby wysokość wypłat znacząco przekraczała statutowe 51%.

Super niezawodny system gry gwarancją wygranej

Z tego co napisałem wcześniej mogłoby się wydawać, że trafienie szóstki w totka jest prawdopodobne mniej niż koniec świata nazajutrz. Tak jednak nie jest – okazuje się, że istnieje jedna super skuteczna metoda, gwarantująca zysk z każdego możliwego stopnia wygranej. Wystarczy jedynie wysłać 13 983 816 zakładów, na każdym skreślając inny zestaw sześciu liczb. Matematycznie gwarantowane jest trafienie w zawartych zakładach 1 „szóstki”, 258 „piątek”, 13 545 „czwórek” i 246 820 „trójek” (liczby te wynikają ze zmodyfikowanego wzoru na $P(N,L,S)$, w którym nie dzieliłem liczby kombinacji przez możliwą ilość skreśleń). Gdyby w tak postawionym zakładzie wypłacone zostały stawki jak w autentycznym przykładzie z 27/09/2008, to zarobiliśmy 8 507 012 zł, co przy wydatku rzędu 27 967 632 zł na postawione zakłady wydaje się kwotą śmiesznie niską (nawet nie pokryje 1/3 wydatków), nie mówiąc już o czasie potrzebnym na skreślenie kuponów (nawet gdybyśmy jeden kupon wypełniali przez 1 sekundę, to potrzebowalibyśmy ponad 5 miesięcy na skreślenie ich wszystkich. Aby być zupełnie uczciwym muszę przyznać, że gdybyśmy zawarli te 14 milionów zakładów, to na pewno wygrane poszczególnych stopni byłyby większe niż te z mojego przykładu. Nawet one nie są jednak w stanie zrekomensować poniesionych wydatków, w szczególności jeśli przypadkowo zdarzy się druga (albo trzecia i kolejna) osoba, która również ustrzeli „szóstkę”. Wówczas nasze straty będą już naprawdę bardzo duże.

Ta strategia wygrywania w Totka jest jak widać bardzo skuteczna, ale ma jedną jedyną



malutką wadę – jest kompletną bzdurą. Prosty bilans ekonomiczny wydatków i wpływów oraz wyobrażenie o zmarnowanym czasie każe zająć się czymś innym, niż skreślaniami 14 milionów kuponów.

Podsumowanie

W tym artykule, w którym zawarłem trochę praktycznego zastosowania rachunku prawdopodobieństwa chciałem pokazać, że chłodna kalkulacja pozwala lepiej panować nad emocjami i szacowaniem swoich szans na wygraną. Można powiedzieć, że: 1) Duży Lotek to niezły biznes dla szczęściarza, który trafi wymarzoną szóstkę, jak również dla organizatora loterii. 2) Trafić w szóstkę w Totka można łatwo, pod warunkiem posiadania kilku miesięcy wolnego czasu, dużego zasobu gotówki i nienastawiania się na zysk. Tak więc – umiesz liczyć? (Nie) licz na szóstkę :)

AUTOR: MARCIN OTOROWSKI
KOŁO NAUKOWE METOD ILOŚCIOWYCH
CZYTAJ W INTERECIE: WYKLADNIK.WNEIZ.PL/?ART=12